Métodos Numéricos
17 de septiembre de 2021
Primer Parcial

DEPARTAMENTO
[ON
ırales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas ☐ Enviar aquí fotos claras y legibles de la resolución ☐ **Justificar todas las respuestas**	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $\det(A) = 1$. Se desea realizar el proceso de triangulación de forma que queden unos en la diagonal de la matriz triangulada. Para ello se modifica el procedimiento de eliminación gaussiana agregando un paso extra antes de triangular la columna i-esima, de forma que el pivote en la posición (i, i) sea 1. Para hacer esto, se multiplica a derecha por matrices de la forma $B_i = I - b_i\, e_n\, e_i^t$, siendo e_i el i-ésimo canónico de $\mathbb{R}^n$. (Ver ejemplo en la página anexa.)

   (a) Sean $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz elemental de Gauss para realizar un primer paso de triangulación, y $B_1 = I - b_1\, e_n\, e_1^t$, con $b_1 \in \mathbb{R}$. Sea además $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $a_{1n} \neq 0$.

      i. Determinar $b_1 \in \mathbb{R}$ tal que $(AB_1)_{11} = 1$. (6 puntos)

      ii. Para el b_1 del item anterior, determinar explícitamente los valores de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de tal forma que $(MAB_1)e_1 = e_1$. (7 puntos)

   (b) Probar que $B_i^{-1} = I + b_i\, e_n\, e_i^t$. (6 puntos)

   (c) Siendo $B = B_1 B_2 \cdots B_{n-1}$, probar que $B^{-1} = I + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\, e_n\, e_i^t$. (7 puntos)

   (d) Probar que $|b_j| \leq \|I - B^{-1}\|_2 \leq \|I - B^{-1}\|_F$[‡] para cualquier $1 \leq j < n$. (9 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Llamamos $cl_1(A), \ldots, cl_n(A)$ a las columnas de A.

   (a) Probar que si A es inversible entonces A^tA admite una factorización de Cholesky $A^tA = LL^t$ y en tal caso $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$. (10 puntos)

   (b) En la hipótesis del ítem anterior, probar que $l_{ii} \leq \|cl_i(A)\|_2$. (10 puntos)

   (c) Probar que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|cl_i(A)\|_2$ y que vale la igualdad si y sólo si las columnas de A forman un conjunto ortogonal. (12 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A + I$ es inversible. Considere la siguiente operación f sobre estas matrices:

$$A \mapsto (I - A)(I + A)^{-1}$$

   (a) Demostrar que $f(f(A)) = A$. (10 puntos)

   (b) Probar que si A es antisimétrica entonces $f(A)$ es ortogonal. (11 puntos)

   (c) Decimos que A antisimétrica y Q ortogonal están asociadas si $f(Q) = A$. Calcular la matriz ortogonal Q asociada a la siguiente matriz antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   ¿Es Q una matriz de Householder, una de Givens o ninguna de las dos?
   (12 puntos)

[‡] $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ es la norma Frobenius de la matriz A.

Ejemplo Ejercicio 1 para matriz A de 3×3, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1$.

- $B_i = I - b_i\, e_n\, e_i^t$ para b_i convenientes.
- M_i es la i-ésima matriz elemental de Gauss para triangular la columna i.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad AB_1 = \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A^{(1)} = M_1 A B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Continuando,

$$A^{(1)} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \color{blue}{1} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad A^{(2)} = M_2 A^{(1)} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Llegamos a:

$$M_2 M_1 A B_1 B_2 = U \Leftrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L}\, U\, \underbrace{B_2^{-1} B_1^{-1}}_{B}$$

Con L, U y B matrices de diagonales con unos y $A = LUB$.